b) A(1,2,3) donc A'(x',y',z') avec $\begin{cases} x' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\times 2 - \frac{2}{3}\times 3 + 2 = -1 \\ y' = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\times 2 - \frac{2}{3}\times 3 + 2 = 0 \\ z' = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\times 2 + \frac{1}{3}\times 2 + 2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} A \in D \\ D \perp P \\ P \text{ est le plan médiateur de } [AA'] \end{cases}$ donc H=A*A'

est le projeté orthogonal de A sur P et par suite $\{H\} = D \cap P$; H(0,1,2).

c) $H(x,y,z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \overrightarrow{AH} = \beta\vec{u},\ \beta \in \mathbf{R} \end{cases}$; $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \beta+1 \\ y = \beta+2 \\ z = \beta+3 \end{cases}$ on a: x+y+z-3=0 $\Leftarrow \beta = -1 \Rightarrow$ H(0,1,2).

3) a) $(S) = \left\{ M \in E \,/\, \frac{MA}{MH} = \sqrt{5} \right\}$ Soit M(x,y,z) $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \\ 3-z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ 2-z \end{pmatrix}$; donc $M \in (S) \Leftrightarrow \frac{MA}{MH} = \sqrt{5} \Leftrightarrow MA^2 = 5MH^2$

$\Leftrightarrow (1-x^2) + (2-y)^2 + (3-z)^2 = 5\left(x^2 + (1-y)^2 + (2-z)^2\right) \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2x - 6y - 14z + 11 = 0$.

b) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y - \frac{7}{2}z + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \left(y-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \left(z-\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{11}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(z-\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$ d'où est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{7}{4}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$d = d(\Omega, P) = \frac{\left|-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{7}{4}-3\right|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} < R$ donc $P \cap (S)$ est un cercle de centre J et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{15}{16} - \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

J est le projeté orthogonal de Ω sur P. On a $\begin{cases} \overrightarrow{\Omega J} = \alpha\vec{N},\ \alpha \in \mathbf{R} \\ J \in P \end{cases}$. Soit J(x,y,z)

$\overrightarrow{\Omega J}\begin{pmatrix} x+\frac{1}{4} \\ y-\frac{3}{4} \\ z-\frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x = \alpha - \frac{1}{4} \\ y = \alpha + \frac{3}{4} \\ z = \alpha + \frac{7}{4} \end{cases}$, $J \in P$ donc x+y+z-3=0 donc $\alpha = \frac{1}{4}$ et par suite J=H. Conclusion : $(S) \cap P = \zeta_{(H,\sqrt{3})}$.

4) Q :x+y+z=0, h l'homothétie de centre A tel que h(P) =Q. $F(0,0,3) \in P$ donc $h(F) = F' \in Q$. On a

$\begin{cases} F' \in (AF) \cap Q \\ \overrightarrow{AF'} = k\overrightarrow{AF} \text{ où } k \text{ est le rapport de h.} \end{cases}$ $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $(AF): \begin{cases} x = -\gamma \\ y = -2\gamma \\ z = 3 \end{cases}$; $\gamma \in \mathbf{R}$. On pose F'(x,y,z) donc

$F'(-\gamma, -2\gamma, 3), F' \in Q \Leftrightarrow -\gamma - 2\gamma + 3 = 0$ donc $\gamma = 1$ d'où F'(-1,-2,3) $\overrightarrow{AF'}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} -2 = k \\ -4 = -2k \\ 0 = 0 \end{cases}$ et par suite k=2.

$h(S) \cap Q = h(S) \cap h(P) = h(S \cap P)$ or $(S) \cap P = \zeta_{(H,\sqrt{3})}$ donc $h(S \cap P)$ est le cercle $\zeta'_{(H';|k|\sqrt{3})}$ avec H'=h(H) et k=2.

$\overrightarrow{AH'} = 2\overrightarrow{AH}$ donc $\begin{cases} x_{H'} - 1 = 2(-1) \\ y_{H'} - 2 = 2(-1) \\ z_{H'} - 3 = 2(-1) \end{cases}$ donc H'(-1,0,1) Conclusion : $h(S) \cap Q = \zeta'_{(H',2\sqrt{3})}$.

Exercice N°16 L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère le tétraèdre ABCE tel que A(1,0,2), B(0,0,1), C(0,-1,3) et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1) a) Vérifier que E a pour coordonnés (0,2,3). b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE.
2) a) Soit P le plan d'équation :x-2y-z+5=0. Montrer que P est parallèle à (ABC).

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...